**MAKALAH ALJABAR LINEAR**

**“RUANG VEKTOR”**

****

**DOSEN PENGAMPU :**

**NATALIS RANSI, S.Si., M.Cs**

**DISUSUN OLEH :**

**LAODE IKHWANUL UZLAH**

**E1E122017**

**JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA**

**FAKULTAS TEKNIK**

**UNIVERSITAS HALU OLEO**

**KENDARI**

**2023**

# KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT. karena dengan limpahan rahmat dan karunia yang diberikan sehingga penyusunan makalah Aljabar Linear dengan judul “Ruang Vektor” ini dapat terselesaikan dengan baik. Makalah ini saya susun sebagai salah satu syarat untuk memenuhi tugas mata kuliah Aljabar Linear.

Shalawat serta salam tak lupa pula untuk Baginda Nabi Allah Muhammad SAW, karena berkat beliaulah kita yang dahulu berada di zaman kegelapan, dan sekarang berada di zaman yang terang benderang serta zaman dimana teknologi sudah semakin canggih dan berkembang pesat.

Dalam proses penyusunan makalah ini, saya mendapat bantuan dari berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Oleh karenanya, dengan segala kerendahan hati saya menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada berbagai pihak tersebut, terutama kepada Bapak Natalis Ransi, S.Si., M.Cs., selaku dosen pengampu mata kuliah Aljabar Linear yang telah menambah wawasan saya karena telah memberikan saya tugas dan materi ini.

Saya menyadari bahwa dalam penyusunan makalah ini masih banyak kekurangan, oleh sebab itu saya sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun.

Akhirnya, saya berharap semoga makalah ini dapat bermanfaat bagi khalayak umum serta pula semoga segala ilmu, bantuan dan dorongan yang telah diberikan dapat bernilai ibadah dan memperoleh balasan yang berlipat ganda dari Allah SWT. Aamiin.

Kendari, 21 Mei 2023

Penyusun

# DAFTAR ISI

[KATA PENGANTAR ii](#_Toc135736452)

[DAFTAR ISI iii](#_Toc135736453)

[BAB I](#_Toc135736454) [PENDAHULUAN 1](#_Toc135736455)

[1.1 Latar Belakang 1](#_Toc135736456)

[1.2 Rumusan Masalah 2](#_Toc135736457)

[1.3 Tujuan 2](#_Toc135736458)

[BAB II](#_Toc135736459) [PEMBAHASAN 3](#_Toc135736460)

[2.1 Ruang Vektor Real 3](#_Toc135736461)

[2.2 Sub-Ruang 4](#_Toc135736462)

[2.3 Kebebasan Linear 7](#_Toc135736466)

[2.4 Basis dan Dimensi 8](#_Toc135736467)

[2.4.1 Basis 8](#_Toc135736468)

[2.4.2 Dimensi 10](#_Toc135736469)

[BAB III](#_Toc135736470) [PENUTUP 11](#_Toc135736471)

[3.1 Kesimpulan 11](#_Toc135736474)

# BAB I

# PENDAHULUAN

## Latar Belakang

Konsep sebuah vektor yang menyatakan serangkaian himpunan aksioma yang jika dipenuhi oleh sekelompok objek, maka objek tersebut dinamakan vektor. Aksioma- aksioma tersebut akan dipilih dengan mengabstrakkan sifat-sifat yang paling penting dari vektor-vektor pada Rn .

Misal V sembarang himpunan objek yang 2 operasinya didefinisikan yaitu penambahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riil).

Penambahan untuk mengasosiasikan aturan dengan setiap pasang objek u dan v dalam V yang mengandung elemen u + v, disebut jumlah u dan v.

Perkalian skalar untuk mengasosiasikan baik untuk setiap skalar k maupun setiap objek u pada V yang mengandung elemen ku, disebut perkalian skalar (skalar multiple) u oleh k.

Jika aksioma–aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek u, v, w pada V dan oleh semua skalar k dan l, maka dinamakan V sebuah ruang vektor (vektor space) dan objek- objek pada V dinamakan vektor.

Ada 10 syarat agar V disebut sebagai ruang vektor, yaitu:

1. Jika Udan Vadalah objek-objek pada V, maka U + Vberada di V
2. U+ V= V+ U(Komutatif)
3. U+ (V+ W) = (U+ V) + W(Asosiatif)
4. Ada sebuah objek 0di V sehingga 0+ U = U + 0= Uuntuk semua Udi V (Elemen netral)
5. Untuk setiap U di V, ada sebuah objek –U di V yang dinamakan negatif U sehingga U + (-U) = (-U) + U = 0 (Elemen Invers)
6. Jika k adalah sembarang skalar dan U adalah sembarang objek di V, maka k U di V
7. K (U **+** V) = k U+ k V, k sembarang skalar.
8. (k + l) U= k U+ l U, k dan l skalar.
9. k (l U) = (kl)U
10. 1U= U

Dalam hal ini tentunya yang paling menentukan apakah V disebut ruang vektor atau tidak adalah operasi-operasi pada V atau bentuk dari V itu sendiri. Jika V merupakan ruang vektor dengan operasi-operasi vektor (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar) yang bukan merupakan operasi standar, tentunya V harus memenuhi 10 syarat diatas, jika satu saja syarat tidak dipenuhi maka tentunya V bukan merupakan ruang vektor.

## Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari makalah Aljabar Linear “Ruang Vektor” ini adalah sebagai berikut:

1. Apa itu ruang vektor real?
2. Apa itu sub-ruang?
3. Apa itu kebebasan linear?
4. Apa itu basis dan dimensi?

## Tujuan

Adapun tujuan dari makalah Aljabar Linear “Ruang Vektor” ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui apa itu ruang vektor real.
2. Untuk mengetahui apa itu sub-ruang.
3. Untuk mengetahui apa itu kebebasan linear.
4. Untuk mengetahui apa itu basis dan dimensi.

# BAB II

# PEMBAHASAN

* 1. Ruang Vektor Real

1. Definisi Ruang Vektor

Suatu himpunan tak kosong dari obyek-obyek sebarang, dimana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). u **+** vdisebut jumlah, Vsebagai ruang vektor, *k* dan *l* adalah skalar.

1. Definisi Ruang Vektor Real

Ruang vektor dimana skalar-skalarnya merupakan bilangan real.

Aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. Jika udan vadalah objek-objek pada V, maka u + vberada di V
2. u+ v= v+ u
3. u+ (v+ w) = (u+ v) + w
4. Terdapat suatu objek 0 di V, disebut vektor nol sehingga 0 **+** u **=** u **+** 0 **=** u untuk semua V.
5. Untuk setiap u di V, terdapat suatu objek **-**u di V, disebut negatif u, sehingga u **+** (-u) = (-u) + u = 0
6. Jika k adalah sebarang skalar dan u adalah sebarang objek di V, maka ku terdapat di V.
7. k(u + v) = ku + kv
8. (k + l)u = ku + lu
9. k(lu) = (kl)(u)
10. lu = u
11. Ruang Vektor dari Fungsi Bernilai Real

Misal V adalah himpunan funsi-fungsi bernilai real yang didefinisikan sepanjang garis real (-, ). Jika f = *f*(x) dan g = *g*(x) adalah dua fungsi sedemikian dan *k* adalah bilangan real sebarang, maka didefinisikan berturut-turut jumlah fungsi f + g dan perkalian skalar *k*f sebagai : (f + g)(*x*) = *f*(*x*) + *g*(*x*) dan (*k*f)(*x*) = *kf*(x)

Teorema : Misalkan V adalah sebuah ruang vektor, u sebuah vektor pada V, dan k sebuah skalar, maka:

1. 0u = 0
2. K0 = 0
3. (-1)u = -u
4. Jika ku = 0, maka k = 0 atau u = 0
   1. Sub-Ruang
5. Definisi

Sub himpunan W dari sebuah ruang vektor V dinamakan subruang (subspace) V jika W itu sendiri adalah ruang vektor di bawah penambahan dan perkalian scalar yang didefinisikan pada V.

Teorema : Jika W adalah suatu himpunan yang terdiri dari satu atau lebih vektor dari suatu vektor V, maka W adalah suatu subruang dari V, jhj syarat-syarat berikut terpenuhi :

1. u dan v adalah vektor-vektor pada *W*, maka u + v barada pada *W*
2. *k* adalah skalar sebarang dan u vektor sebarang pada *W*, maka *k*u berada pada *W*.
3. Subruang dari Polinomial dengan Pangkat ≤ n

Misal n adalah integer taknegatif dan W terdiri dari semua fungsi yang dapat dinyatakan dalam bentuk p(x) = a0 + a1x + . . . + an xn

Bukti : misal p dan q adalah polinomial

p(x) = a0 + a1x + . . . + an xn dan q(x) = bo + b1x + . . . + bn xn

Maka : (p + q)(x) = p(x) + q(x) = (a0 + b0) + (a1 + b1)x + . . . + (an + bn)xn

dan (kp)(x) = kp(x) = (ka0) + (ka1)x + . . . + (kan)xn

1. Ruang Solusi dari Sistem Homogen

Jika Ax = 0 adalah suatu sistem linear homogen yang terdiri dari m persamaan dengan n faktor yang tidak diketahui, maka himpunan vektor solusi adalah suatu subruang dari Rn.

Suatu vektor w disebut suatu kombinasi linear dari vektor-vektor v1, v2, . . . , vr jika dapat dinyatakan dalam bentuk w = k1 v1 + k2 v2 + . . . + kr vr dimana k1, k2, . . . , kr adalah skalar.

1. Vektor-vektor pada adalah Kombinasi Linear i, j dan k

Setiap vektor v = (a, b, c) pada R3 dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor basis standar.

i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)

karena v = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = ai + bj + ck

Merentang : Jika v1, v2, . . . , vr adalah vektor-vektor pada suatu ruang vektor V, maka umumnya beberapa vektor pada V merupakan kombinasi linear dari v1, v2, . . . , vr dan vektor lainnya tidak.

Teorema : Jika v1, v2, . . . , vr vektor-vektor pada suatu ruang vektor V, maka:

1. Himpunan W yang terdiri dari semua kombinasi linear v1, v2, . . . , vr adalah suatu subruang dari V.
2. W adalah subruang terkecil dari V yang mengandung v1, v2, . . . , vr dalam arti bahwa setiap subruang lain dari V yang mengandung v1, v2, . . . , vr pasti mengandung W.
3. Ruang yang Direntang

Jika S = {v1, v2, . . . , vr} adalah suatu himpunan vektor-vektor pada suatu ruang vektor V, maka subruang W dari V yang terdiri dari semua kombinasi linear vektor-vektor pada S.

Teorema : Jika S = {v1, v2, . . . , vr} dan S' = {w1, w2, . . . , wk} adalah dua himpunan vektor-vektor suatu ruang vektor V maka : rentang {v1, v2, . . . , vr} = rentang {w1, w2, . . . , wk}. Jika setiap vektor pada S adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S' dan setiap vektor pada S' suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S.

Contoh:

Tinjaulah vector-vektor u = (1, 2, -1) dan v = (6, 4, 2) di R3. Perlihatkan bahwa w = (9, 2, 7) adalah kombinasi linear u dan v serta bahwa w’ = (4, -1, 8) bukanlah kombinasi linear u dan v.

Jawab:

Supaya w merupakan kombinasi linear u dan v, harus ada scalar k1 dan k2 hingga w = k1 u + k2 v ; yakni (4,-1, 8)=k1(1, 2, -1)+k2(6, 4, 2)

Atau (9, 2, 7)=(k1 + 6k2, 2k1 + 4k2, -k1 + 2k2)

Dengan menyamakan komponen yang bersesuaian memberikan

k1 + 6k2 = 4

2k1 + 4k2 = -1

-k1 + 2k2 = 8

System persamaan – persamaan ini tidak konsisten. Sehingga tidak ada scalar-skalar seperti itu. Sebagai konsekuensinya, maka w’ bukanlah kombinasi linear u dan v.

Teorema : Jika v1, v2,…,vr adalah vector – vector pada ruang vector V dan jika masing – masing vector pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear v1, v2,…,vr maka kita mengatakan bahwa vector – vector ini merentang V.

Contoh:

Vector-vektor i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) dan k = (0, 0, 1) merentang R3 karena setiap vector (a, b, c) pada R3 dapat kita tuliskan sebagai (a, b, c) = ai + bj + ck

Yang merupakan kombinasi linear i, j, dan k

Contoh:

Tentukan apakah v1 = (1, 1, 2), v2 = (1, 0, 1), dan v3 = (2, 1, 3) merentang R3.

Pemecahan. Kita harus menentukan apakah sebarang vector b = (b1, b2, b3) pada R3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

b = k1 v1 + k2 v2 + k3 v3

dari vector – vector v1, v2, v3. Dengan menyatakan persamaan ini dalam komponen – komponen maka akan memberikan

(b1, b2, b3) = k1 (1, 1, 2) + k2 (1, 0, 1) + k3 (2, 1, 3) atau

(b1, b2, b3) = (k1 + k2 + 2 k3, k1 + k3,2k1 +k2 + 3k3

Dapat juga k1 + k2 + 2 k3 = b1

k1 + k3 = b2

2k1 +k2 + 3k3 = b3

Menurut bagian a dan bagian d dari teorema 15, maka system ini akan konsisten untuk semua nilai b1, b2, dan b3 jika dan hanya matriks koefisien – koefisien dapat dibalik.

A =

Tetapi det (A) = 0, sehingga A tidak dapat dibalik, dan sebagai konsekuensinya, maka v1, v2, v3 tidak merentang R3.

Teorema : Jika v1, v2,…,vr adalah vector-vektor pada ruang V, maka:

1. Himpunan W dari semua kombinasi linear v1, v2,…,vr adalah subruang V.
2. W adalah subruang terkecil dari V yang mengandung v1, v2,…,vr  dalam arti bahwa setiap subruang lain dari V yang mengandung v1, v2,…,vr harus mengandung W.

## Kebebasan Linear

1. Definisi

Jika S = {v1, v2, . . . , vr} adalah himpunan tak kosong vektor-vektor, maka persamaan vektor k1 v1 + k2 v2 + . . . + kr vr = 0 memiliki paling tidak satu solusi, yaitu : k1 = 0, k2 = 0, . . . , kr = 0. Jika ini satu-satunya solusi, maka S sebagai himpunan bebas linear.

Teorema :

Suatu himpunan S dengan dua atau lebih vektor adalah :

1. Tidak bebas linear jika paling tidak salah satu dari vektor pada S dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada S.
2. Bebas linear jika tidak ada vektor pada S yang dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain pada S.
3. Fakta Sederhana Kebebasan Linear

Teorema :

1. Suatu himpunan terhingga vektor-vektor ynag mengandung vektor nol adalah tidak bebas linear.
2. Suatu himpunan dengan tepat dua vektor adalah bebas linear jika tidak satu pun dari vektornya merupakan kelipatan skalar dari vektor lainnya.
3. Interpretasi Geometrik dari Kebebasan Linear

* Pada R2 atau R3, suatu himpunan yang terdiri dari dua vektor adalah bebas linear jika vektor-vektor tersebut tidak terletak pada garis yang sama ketika ditempatkan sedemikian rupa sehingga titik awalnya terletak pada titik asal.
* Pada R3, suatu himpunan yang terdiri dari tiga vektor adalah bebas linear jika vektor-vektor tersebut tidak terletak pada bidang yang sama ketika ditempatkan sedemikian rupa sehingga titik awalnya terletak pada titik asal.

Teorema : Misal S = {v1, v2, . . . , vr} adalah suatu himpunan vektor-vektor pada Rn jika r > n maka S tidak bebas linear.

## Basis dan Dimensi

### Basis

Definisi : Generalisasi ruang vektor suatu sistem koordinat pada ruang berdimensi 2 dan 3.

Koordinat : Koefisien-koefisien pada basis V.

Definisi : Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan S = {v1, v2, . . . , vn} adalah himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut basis untuk V jika dua syarat berikut berlaku:

* 1. S bebas linear
  2. S merentang V

Penjelasan:

Basis dari ruang vektor itu tidak harus tunggal tetapi bisa lebih dari satu basis. S itu termasuk bebas linear atau linear independent”.Maksudnya adalah bilangan – bilangan yang termasuk di dalam A harus bebas linier atau dengan kata lain tidak boleh berkelipatan dengan himpunan yang lain. Tetapi ada kalanya bagaimana jika kita menemukan dua himpunan vektor atau lebih yang berkelipatan. Kondisi seperti ini disebut bergantung linier. Tetapi suatu himpunan bisa juga disebut bergantung linier jika terdapat himpunan vektor yang anggotanya mengandung nol. Jika ini terjadi berarti kedua himpunan tersebut bukan bersifat bebas linier dan berarti tidak dapat disebut basis.

Contoh:

Selidiki dan tentukan apakah himpunan vektor – vektor dibawah ini bebas linier atau bergantung linier ?

1. A = {2,2,3} dan B = {3,1,2}
2. B = {2,3,4} dan C = {4,6,8}
3. U = {1,2,3} V = {2,3,7} dan W = {0,0,0}

Jawab :

1. Himpunan vektor ini termasuk bebas linier karena semua anggota himpunannya tidak berkelipatan.
2. Himpunan vektor ini disebut bergantung linier karena semua anggota himpunannya berkelipatan satu sama lain yaitu C=2B.
3. Jika ada himpunan yang mengandung nol berarti disebut bergantung linier walaupun himpunan lain bebas linier tetapi jika ada himpunan yang mengandung nol tetap disebut bergantung linier.

Contoh :

Himpunan vector-vektor , dimana v1= (2, -1, 0, 3), v2 = (1, 2, 5, -1), dan v3 = (7, -1, 5, 8) adalah himpunan tak bebas linier, karena 3v1 + v2 – v3 = 0.

Contoh :

Tinjaulah vektor-vektor i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) dan k = (0, 0, 1) pada R3. Ruas komponen persamaan vector

K1 i + k2 j + k3 k = 0

K1(1, 0, 0) + k2(0, 1, 0) + k3(0, 0, 1) = 0

Jadi, K1 = 0, k2 = 0 dan k3 = 0; sehingga himpunan S = (i, j, k) bebas linier. Uraian serupa dapat digunakan untuk memperlihatkan bahwa vector-vector e1 = (0, 0, 0, … , 1), e2 = (0, 1, 0, 0, …, 0), … ,en = (0, 0, 0, …,0) membentuk himpunan bebas linier pada Rn

Teorema :

Jika S = {v1, v2, . . . , vn} adalah suatu basis dari ruang vektor V, maka setiap vektor v pada V dapat dinyatakan dalam bentuk v = c1 v1 + c2 v2 + . . . + cn vn dengan tepat satu cara.

### Dimensi

Definisi : Jumlah vektor pada suatu basis.

Dimensi Terhingga : Suatu ruang vektor taknol *V* terdiri dari himpunan terhingga vektor-vekor {, , . . . , } yang membentuk suatu basis.

Kita dapat mengetahui nilai dari suatu dimensi pada suatu himpunan atau basis dari jumlah vektor – vektor tersebut. Atau dengan kata lain misalkan V adalah suatu ruang vektor,A = {v1,v2,v3,…vn} basis dari V. Dimensi dari V itu = n (banyaknya vektor – vektor di A).

Contoh:

Tentukan basis dan dimensi dari ruang vektor yang dibentuk oleh :

1. A={1,2,3} B={2,2,3} C={2,1,2}
2. A={1,2,3} B={2,4,6} C={2,3,5}
3. A={2,3,4} B={4,6,8} C={6,9,12}

Jawab:

* 1. Ketiga himpunan diatas termasuk vektor yang bersifat bebas linier. Oleh karena itu dimensinya adalah 3 dan basis adalah {A,B,C}. Ketiganya termasuk basis karena bebas linier.
  2. Dari himpunan – himpunan di atas,dua vektor yaitu {A,B} bergantung linier karena berkelipatan. Karena lebih dominan bergantung linier sehingga {A,B,C} bergantung linier. Tetapi karena yang dapat dikatakan sebagai basis harus bersifat bebas linier sehingga kita dapat mengambil dua vektor yang bebas linier yaitu {A,C}. Berarti dimensi adalah 2 karena vektor yang termasuk basis ada 2.Jadi basisnya adalah {A,C}.
  3. Ketiga vektor – vektor diatas berkelipatan sehingga bergantung linier. Karena dari itu,kita hanya dapat mengambil satu vektor yang bebas linier yaitu {C}. Jadi dimensi adalah 1 dan basisnya adalah {C}.

# BAB III

# PENUTUP

2. 1. Kesimpulan

Ruang vektor merupakan struktur pada aljabar yang mengaitkan himpunan yang memenuhi sifat grup yang komutatif dan himpunan yang memenuhi sifat lapangan. Pada tingkat dasar, ruang vektor dipahami sebagai himpunan yang memiliki sepuluh syarat dengan skalar pada himpunan yang memiliki sifat lapangan (kadang-kadang pada buku yang sifatnya elementer langsung disebutkan atas bilangan riil, karena bilangan riil adalah salah satu contoh lapangan). Pada contoh-contoh umum sering diberikan grup dan lapangannya adalah himpunan tak berhingga, sehingga seringkali contoh-contoh tersebut terlihat abstrak. Ruang vektor dapat dipahami dengan mudah (relatif) ketika pembahasan dilakukan pada himpunan-himpunan berhingga